林分の成長データを用いた成長モデル（密度管理図）の修正：一般化最小二乗法

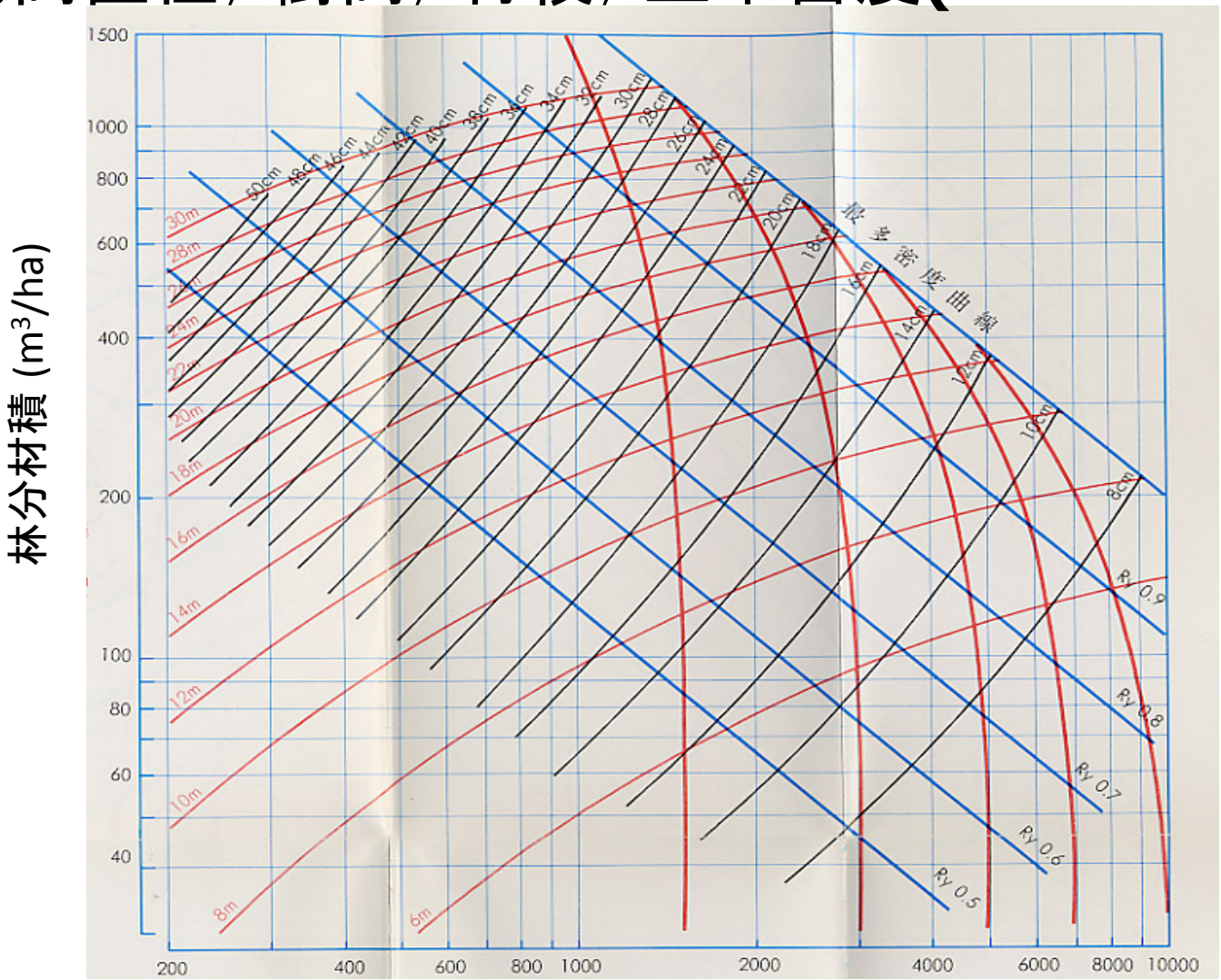
吉本　敦
統計数理研究所

１．林分の成長モデル（密度管理図）：状態依存
（Stand Density Management Diagram）

- SDMDはAndo (1962 , 1966 ,1968)によって日本で展開
- SDMDは立木密度，材積，胸高直径，樹高と言った成長要素の関係を図示したもの

- 樹高と立木密度が分かれば十分

林分の成長モデル（密度管理図）：状態依存
胸高直径，樹高，材積，立木密度(Ando 1968)



密度管理図の関数群

平均単木材積	$v = \dfrac{1}{0.068509N \cdot H^{-1.347464} + 2658.2 \cdot H^{-2.814651}}$
自然枯死線 植栽本数 N_0	$\dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N_0} + \dfrac{v}{3.47089 \times 10^6 N_0^{-0.9184}}$
ha 当たり材積	$V = v \cdot N$
林分形状高	$HF = 0.791213 + 0.244012H\sqrt{N}/100 + 0.353895H$
ha 当たり断面積	$G = \dfrac{V}{HF}$
断面積平均直径	$\overline{D}g = 200\sqrt{G/(\pi \cdot N)}$
平均胸高直径	$\overline{DBH} = -0.048940 - 0.034814H\sqrt{N}/100 + 0.98937Dg$
最多密度における ha 当たり本数	$N_{Rf} = 10^{5.3083} H^{-1.4672}$
最多密度における ha 当たり材積	$V_{Rf} = \dfrac{N_{Rf}}{0.068509N_{Rf} \cdot H^{-1.347464} + 2658.2H^{-2.814651}}$
収量比数	$Ry = \dfrac{V}{V_{Rf}}$

２．樹高成長関数を用いた
成長モデル（密度管理図）の修正

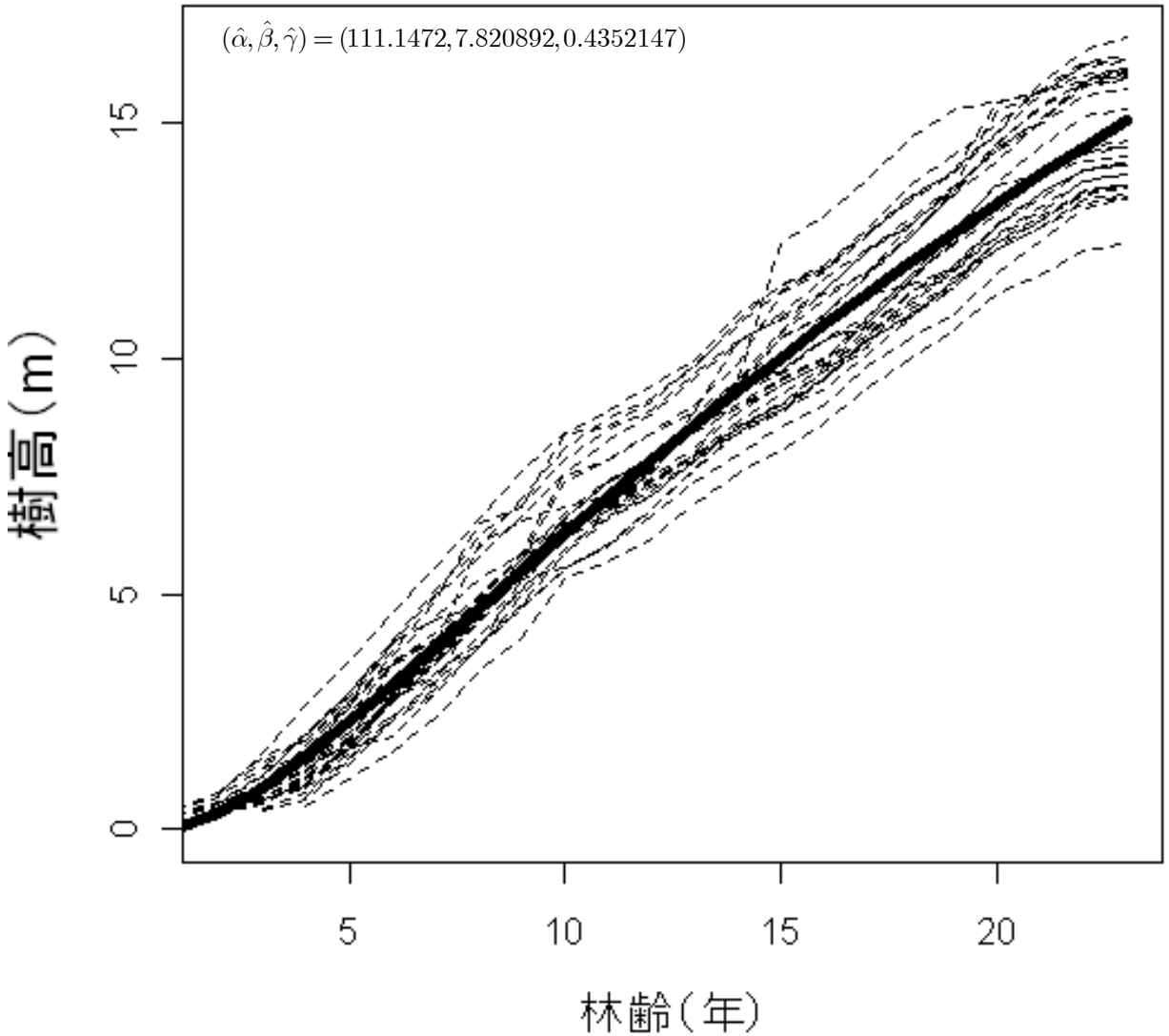
- 林分密度管理図には時間の要素がない

- 樹高成長曲線の導入により時間変化を反映

Korf関数	上層樹高	$H_i = \mu_i(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\left(-\beta t_i^{-\gamma}\right) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. E[\varepsilon_i] = 0, Var[\varepsilon_i] = \sigma^2$
	平均単木材積	$v = \dfrac{1}{0.068509 N \cdot H^{-1.347464} + 2658.2 \cdot H^{-2.814651}}$
	自然枯死線 植栽本数 N_0	$\dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N_0} + \dfrac{v}{3.47089 \times 10^6 N_0^{-0.9184}}$
	ha 当たり材積	$V = v \cdot N$
	林分形状高	$HF = 0.791213 + 0.244012 H\sqrt{N} / 100 + 0.353895 H$
	ha 当たり断面積	$G = \dfrac{V}{HF}$
	断面積平均直径	$\overline{D}g = 200\sqrt{G / (\pi \cdot N)}$
	平均胸高直径	$\overline{DBH} = -0.048940 - 0.034814 H\sqrt{N} / 100 + 0.98937 Dg$
	最多密度における ha 当たり本数	$N_{Rf} = 10^{5.3083} H^{-1.4672}$
	最多密度における ha 当たり材積	$V_{Rf} = \dfrac{N_{Rf}}{0.068509 N_{Rf} \cdot H^{-1.347464} + 2658.2 H^{-2.814651}}$
	収量比数	$Ry = \dfrac{V}{V_{Rf}}$

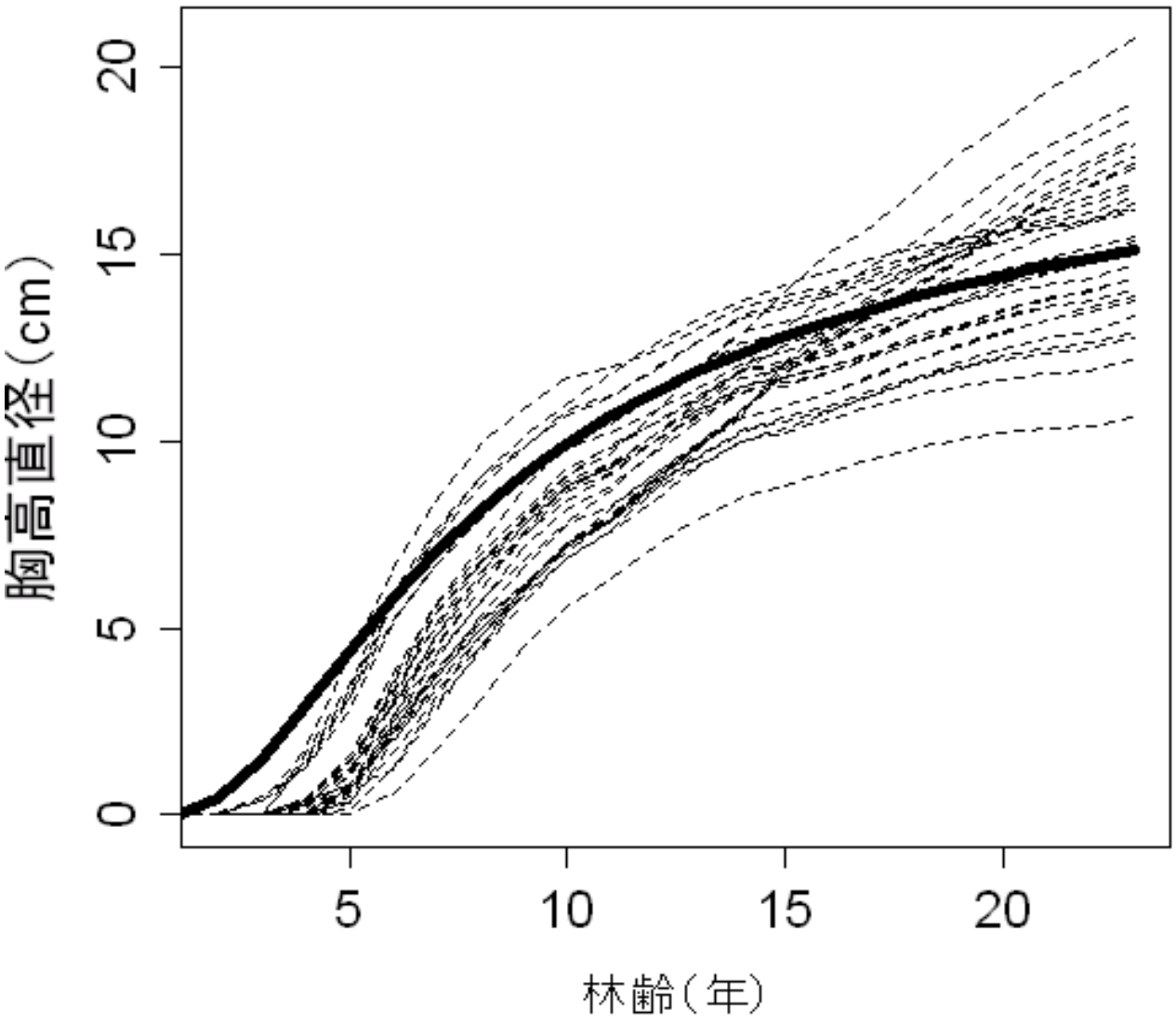
推定された樹高成長曲線

$$H_i = \mu_i(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\left(-\beta t_i^{-\gamma}\right) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d. E[\varepsilon_i] = 0, Var[\varepsilon_i] = \sigma^2$$

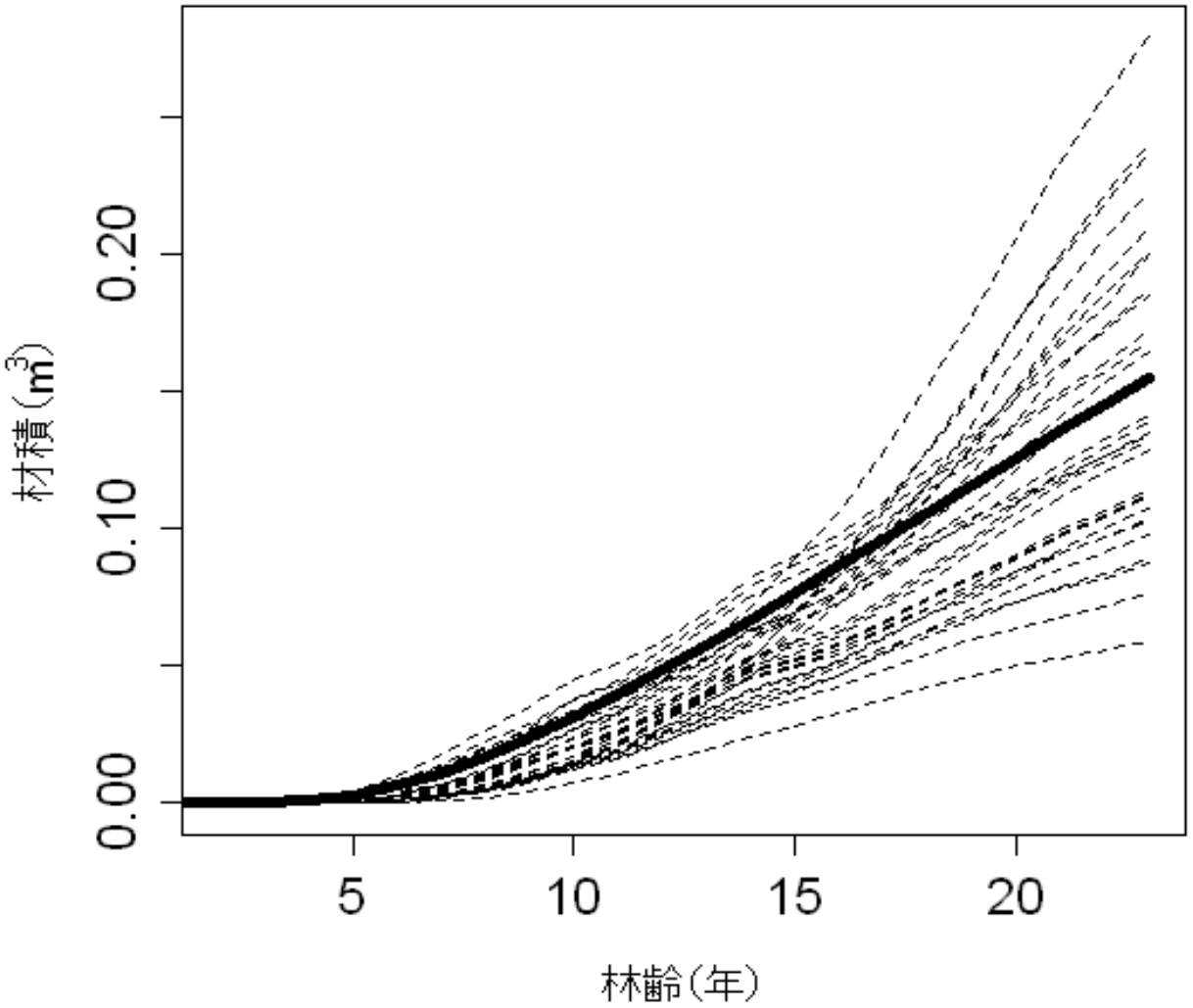


上層樹高	$H = 111.147 \exp\left(-7.82t^{-0.435}\right)$
平均単木材積	$v = \dfrac{1}{0.068509N \cdot H^{-1.347464} + 2658.2 \cdot H^{-2.814651}}$
自然枯死線 植栽本数 N_0	$\dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N_0} + \dfrac{v}{3.47089 \times 10^6 N_0^{-0.9184}}$
ha 当たり材積	$V = v \cdot N$
林分形状高	$HF = 0.791213 + 0.244012H\sqrt{N}/100 + 0.353895H$
ha 当たり断面積	$G = \dfrac{V}{HF}$
断面積平均直径	$\overline{D}g = 200\sqrt{G/(\pi \cdot N)}$
平均胸高直径	$\overline{DBH} = -0.048940 - 0.034814H\sqrt{N}/100 + 0.98937Dg$
最多密度における ha 当たり本数	$N_{Rf} = 10^{5.3083} H^{-1.4672}$
最多密度における ha 当たり材積	$V_{Rf} = \dfrac{N_{Rf}}{0.068509N_{Rf} \cdot H^{-1.347464} + 2658.2H^{-2.814651}}$
収量比数	$Ry = \dfrac{V}{V_{Rf}}$

密度管理図からのDBH推定値と実測値



密度管理図からの材積推定値と実測値



３．林分の成長データを用いた成長モデル（密度管理図）の修正：一般化最小二乗法

- 樹高，DBH，材積からの残差を同時に最小化してしまう.

$$\boldsymbol{y}_i = (H_i, D_i, V_i)'$$

$$\boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta}) = (\hat{H}_i(\boldsymbol{\theta}), \hat{D}_i(\boldsymbol{\theta}), \hat{V}_i(\boldsymbol{\theta}))'$$

$\boldsymbol{\theta}$ ：モデル内の未知パラメータベクトル

$(\hat{H}_i(\boldsymbol{\theta}), \hat{D}_i(\boldsymbol{\theta}), \hat{V}_i(\boldsymbol{\theta}))'$ ：推定されるデータセット

$\boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta})$ の未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を残差平方和の最小化により推定

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta}))'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta}))$$

この段階では，残差の共分散構造が考慮されていない

$\boldsymbol{y}_i$ 間の相関が無視され，推定結果に対し $\boldsymbol{y}_i$ の成分の中で最も大きなものの影響を受ける

残差の共分散行列を考慮

基準化した重み付き残差平方和の最小化により相関を考慮

共分散行列： $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu}_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu}_i(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))'$

$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$により基準化された重み付き残差平方和を最小化

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta}))'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu}_i(\boldsymbol{\theta}))$$

推定量$\hat{\boldsymbol{\theta}}$：一般化最小二乗推定量（GLSE: Generalized Least Square Estimator）

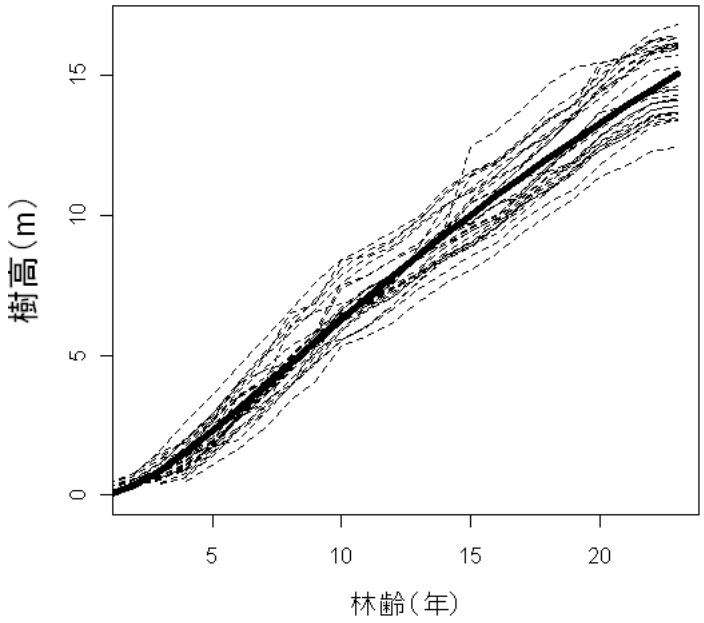
Rプログラム

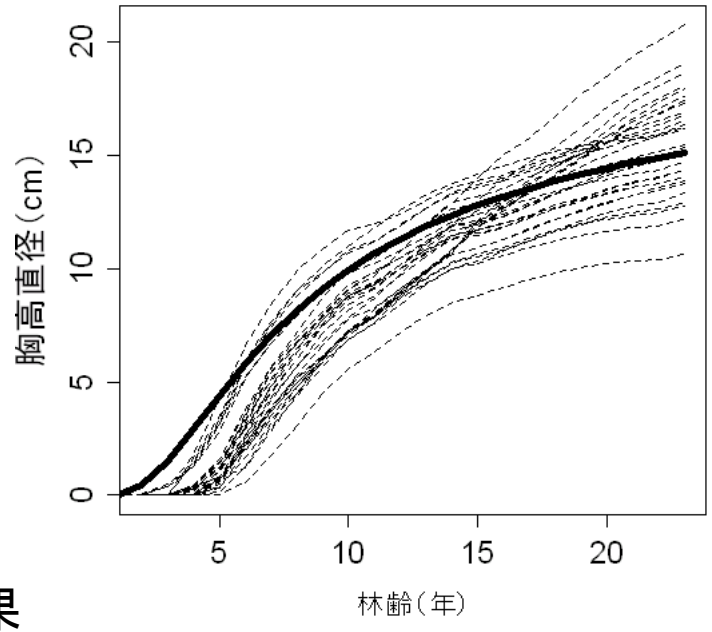
```
FS.sdmd.func <- function(p,t,D,H,v)
    { N <- 1:length(t);     N[]<-2918
        dif <- matrix(0,length(t),4)
        H1 <- exp(p[13])*exp(-exp(p[14])*t^(-exp(p[15])))
        dif[,1] <- H1 - H
        v1 <- 1/(exp(p[1])*N*H1^(-exp(p[2]))+exp(p[3])*H1^(-exp(p[4])))
        dif[,2] <- v1 - v
        V <- v1*N
        HF <- exp(p[5])+exp(p[6])*H1*sqrt(N)/100+exp(p[7])*H1
        G <- (V/HF)
        Dg <- 200*sqrt((G/(pi*N)))
        D1 <- -exp(p[8])-exp(p[9])*H1*sqrt(N)/100+exp(p[10])*Dg
        dif[,3] <- D1 - D
        sum(dif^2)
    }
```

```
SD.sdmd.func <- function(p,t,D,H,v)
    { N <- 1:length(t);     N[]<-2918
        dif <- matrix(0,length(t),3)
        H1 <- exp(p[13])*exp(-exp(p[14])*t^(-exp(p[15])))
        dif[,1] <- H1 - H
        v1 <- 1/(exp(p[1])*N*H1^(-exp(p[2]))+exp(p[3])*H1^(-exp(p[4])))
        dif[,2] <- v1 - v
        V <- v1*N
        HF <- exp(p[5])+exp(p[6])*H1*sqrt(N)/100+exp(p[7])*H1
        G <- (V/HF)
        Dg <- 200*sqrt((G/(pi*N)))
        D1 <- -exp(p[8])-exp(p[9])*H1*sqrt(N)/100+exp(p[10])*Dg
        dif[,3] <- D1 - D
        sigma <- matrix(0,3,3)
        for(i in 1:length(H1)) {sigma<-sigma+dif[i,]%*%t(dif[i,])}
        sigma <- sigma/length(t)
        SD <- c(0)
        for(i in 1:length(t)){SD <- SD +t(dif[i,])%*% solve(sigma) %*% dif[i,]}
        SD
    }
```

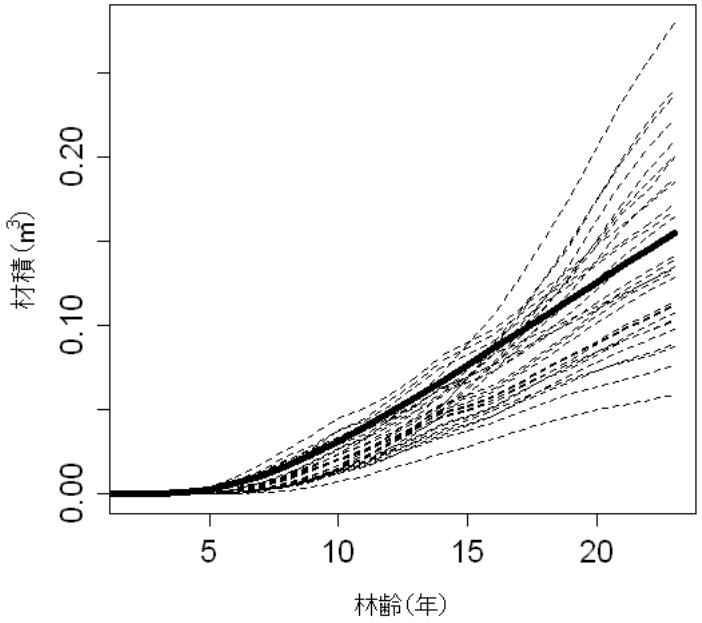
推定

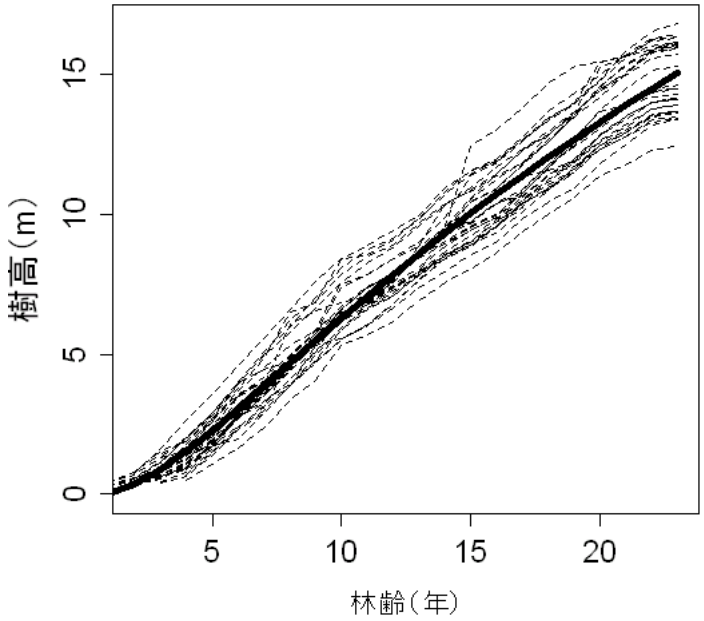
```
source(“Kankyo.R”)

# First step for generalized least square estimation

FS.glse<-nlminb(p0,FS.sdmd,x=F,p1=p1,N0=3100,control=list(eval.max=10000,iter.max=10000))

p0 <- FS.glse$par

# Second step for generalized least square estimation

SD.glse<-nlminb(p0,SD.sdmd,x=F,N0=3100,control=list(eval.max=10000,iter.max=10000))

p <- SD.glse$par
```

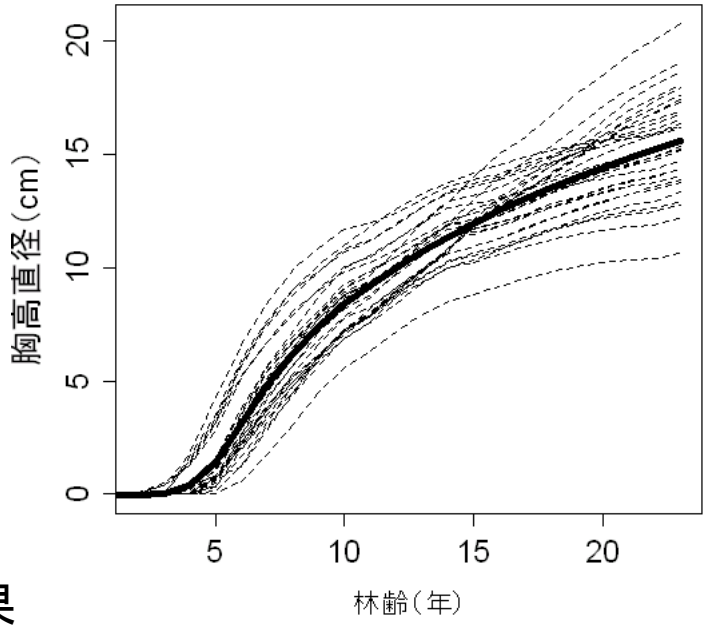

樹高(m)
0
5
10
15
5
10
15
20
林齢(年)


胸高直径(cm)
0
5
10
15
20
5
10
15
20
林齢(年)

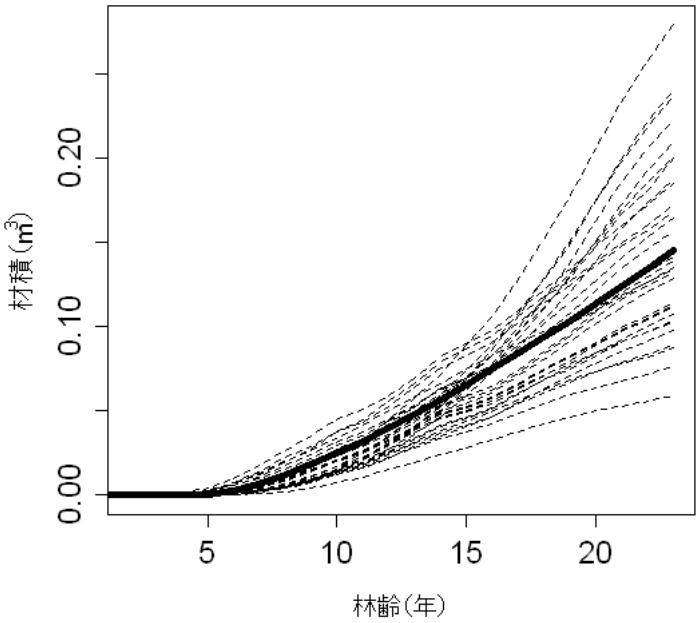
以前の結果


材積(m3)
0.00
0.10
0.20
5
10
15
20
林齢(年)


樹高（m）
0
5
10
15
5
10
15
20
林齢（年）


胸高直径（cm）
0
5
10
15
20
5
10
15
20
林齢（年）

修正の結果


材積（m3）
0.00
0.10
0.20
5
10
15
20
林齢（年）

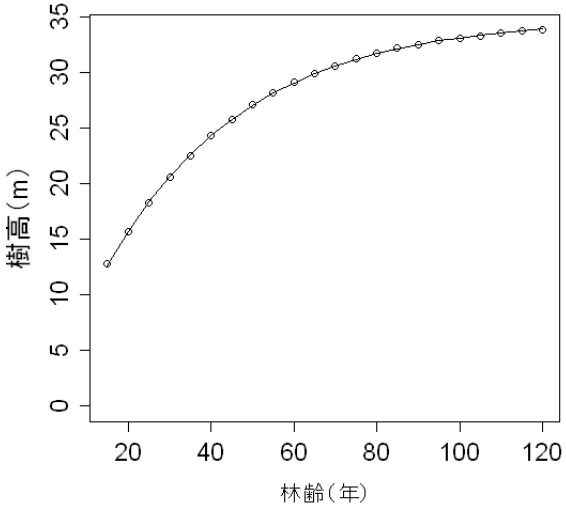
表－2－1　パラメータ値の比較

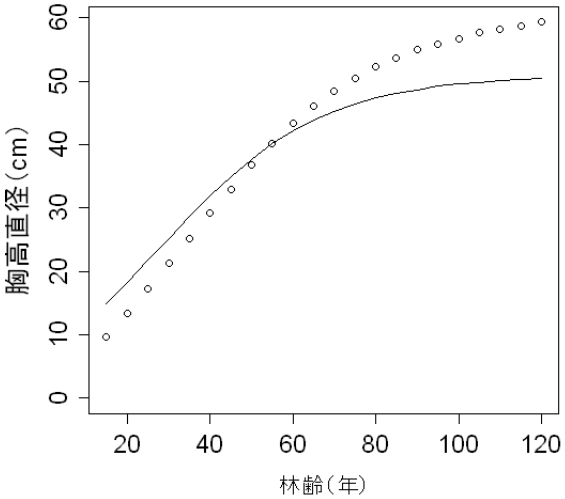
数式	par.stmd	パラメータ値		
		推定前	最推定後	比
一本あたりの材積	1	0.069	0.449	6.560
	2	1.348	1.936	1.436
	3	2658.200	262639.800	98.804
	4	2.815	6.325	2.247
林分形状高	5	0.791	0.204	0.257
	6	0.244	0.027	0.110
	7	0.354	0.011	0.030
平均胸高直径	8	0.049	0.000008	0.000
	9	0.035	0.144	4.128
	10	0.989	0.298	0.301
樹高成長	13	111.147	110.367	0.993
	14	7.821	7.824	1.000
	15	0.435	0.436	1.003

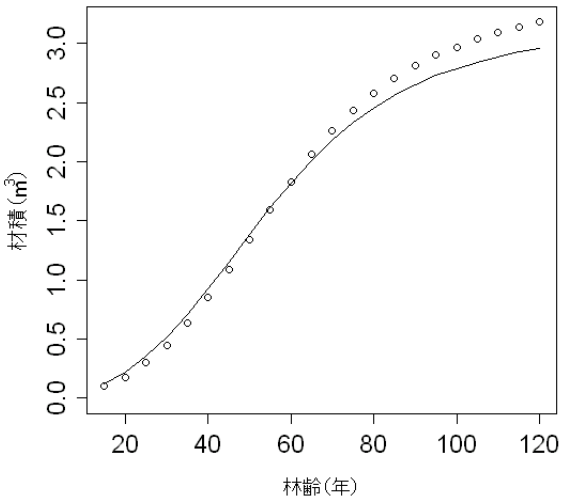
表－2－2　宮崎県スギ林収穫表

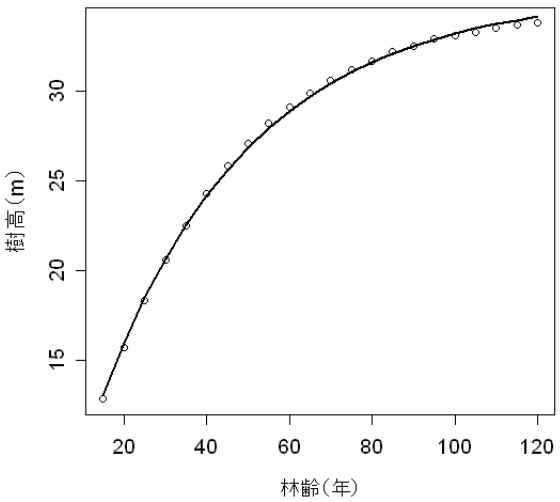
林齢	平均樹高	平均胸高直径	本数	幹材積	幹材積
年）	ｍ）	㎝）	本/ha）	㎥/ha）	㎥/本）
15	12.8	9.6	2605	252	0.10
20	15.7	13.4	1991	364	0.18
25	18.3	17.3	1543	464	0.30
30	20.6	21.3	1218	550	0.45
35	22.5	25.2	980	625	0.64
40	24.3	29.2	808	688	0.85
45	25.8	32.9	682	743	1.09
50	27.1	36.8	591	791	1.34
55	28.2	40.2	524	834	1.59
60	29.1	43.3	475	870	1.83
65	29.9	46.0	440	905	2.06
70	30.6	48.4	414	934	2.26
75	31.2	50.4	395	960	2.43
80	31.7	52.2	382	985	2.58
85	32.2	53.7	372	1,006	2.70
90	32.5	54.9	365	1,026	2.81
95	32.9	55.8	359	1,042	2.90
100	33.1	56.6	356	1,059	2.97
105	33.3	57.7	353	1,073	3.04
110	33.5	58.1	351	1,086	3.09
115	33.7	58.7	349	1,096	3.14
120	33.8	59.3	348	1,106	3.18

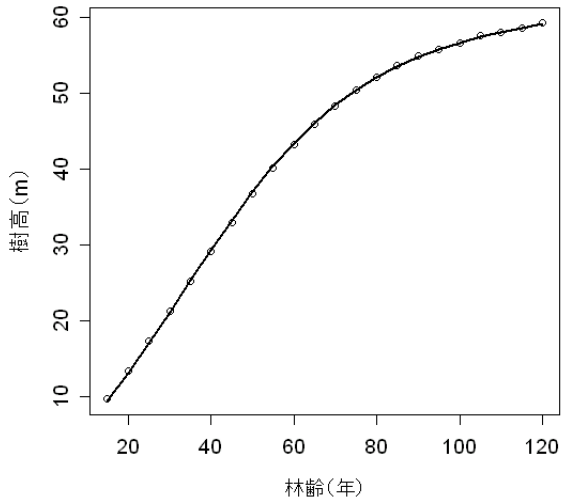
Chapman-Richards $H = a(1 - e^{-b \cdot t})^c$

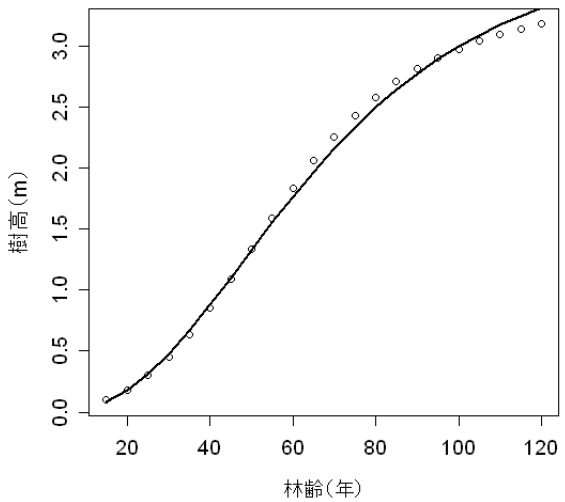







樹高(m)
15
20
25
30
20
40
60
80
100
120
林齢(年)


樹高(m)
10
20
30
40
50
60
20
40
60
80
100
120
林齢(年)


樹高(m)
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
20
40
60
80
100
120
林齢(年)

表－2－3　収穫表データに対するパラメータ推定値の比較

数式	par.stmd	パラメータ値		
		推定前	最推定後	比
一本あたりの材積	1	0.069	0.029	0.423
	2	1.348	1.536	1.140
	3	2658.200	180579.800	67.933
	4	2.815	3.813	1.355
林分形状高	5	0.791	0.000	0.000
	6	0.244	14860950	60902537.580
	7	0.354	0.007	0.020
平均胸高直径	8	0.049	0.000	0.000
	9	0.035	0.000	0.000
	10	0.989	2801.969	2832.074
樹高成長	13	34.843	35.501	1.019
	14	0.030	0.026	0.867
	15	0.999	0.896	0.897